УДК 517.9

СИНГУЛЯРНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ТИПА КОРДЕСА ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

©Е. А. Калита

Рассматривается эллиптическая система

$$\mathcal{L}u \equiv \operatorname{div}^t F(x, D^s u) = \operatorname{div}^t f(x), \tag{1}$$

$s+t = 2m$, s, t — целые неотрицательные, $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Предполагается выполненным структурное условие, аналогичное условию Кордеса, которое обеспечивает априорную оценку в W_2^s. Рассматриваемый класс систем содержит как классические уравнения типа Кордеса [1], так и дивергентные системы со стандартными структурными условиями. Изучается разрешимость (1) при $f \notin L_{2,\mathrm{loc}}$, в частности, получены условия существования фундаментального решения у оператора $\mathcal{L}$.

Пусть функция F измерима по x, непрерывна по остальным аргументам и представима в виде

$$\operatorname{div}^t F(x, D^s u) = \Delta^m u + \operatorname{div}^t A(x, D^s u), \tag{2}$$

где $A(x, 0) = 0$ и A липшицева по старшим производным с константой меньше единицы:

$$|A(x,\eta) - A(x,\xi)| \leq K^{1/2}|\eta - \xi|, \quad K < 1. \tag{3}$$

Здесь A — вектор-функция размерности Nn^t (N — размерность системы), η, ξ — вектора размерности Nn^s. Данное структурное условие введено автором [2], [3]; в случае недивергентного уравнения второго порядка

$$\sum_{ij=1}^{n} b_{ij}(x, u, Du) D_i D_j u = f(x)$$

оно совпадает с классическим условием Кордеса [1]

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ii} \geq \left[(n-1+\delta)\sum_{ij=1}^{n} b_{ij}^2\right]^{1/2}, \quad \delta > 0,$$

причем $K = 1-\delta$; в случае дивергентных систем ($s = t = m$) оно совпадает со стандартной парой условий

$$\sum_i \sum_{|\alpha|=m} (F_\alpha^i(x,\eta) - F_\alpha^i(x,\xi))(\eta_\alpha^i - \xi_\alpha^i) \geq \lambda|\eta - \xi|^2,$$

$$\left[\sum_i \sum_{|\alpha|=m} (F_\alpha^i(x,\eta) - F_\alpha^i(x,\xi))^2\right]^{1/2} \leq \Lambda|\eta - \xi|,$$

причем $K \leq 1 - (\lambda/\Lambda)^2$.

Определим числа $a_1(K) \in (0,n)$ и $a_2(K) \in (-n,0)$ как корни уравнения $||R_{st}||_{L_{2,a}} = K^{-1/2}$, где $R_{st} = D^s\Delta^{-m}\mathrm{div}^t$ – сингулярный интегральный оператор, переводящий вектор-функции размерности n^t в вектор-функции размерности n^s, $L_{2,a}$ – весовое пространство $L_2(\mathbb{R}^n;|x|^a)$. Корректность этого определения следует из

1) $||R_{st}||_{L_{2,a}} < \infty$, $|a| < n$ [4],

2) $||R_{st}||_{L_{2,a}}$ логарифмически выпукло по a (интерполяционная теорема Стейна-Вейса),

3) $||R_{st}||_{L_2} = 1$ (равенство Парсеваля).

Ниже будут указаны явные оценки a_1, a_2, точные при $s+t=2$, здесь отметим только $a_1 \to n$, $a_2 \to -n$ при $K \to 0$. Обозначим $L_{2,\omega}$ – весовое пространство $L_2(\mathbb{R}^n;\omega(x))$, $||f||_\omega = ||f;L_{2,\omega}||$.

Теорема 1 . *Пусть* $a \in (0,a_1)$, $b \in (a_2,0)$,

$$\int_0^\infty \mu_{\frac{n+a}{2}}(\{x:|f_1(x)|>\tau\})d\tau < \infty, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^2(1+|x|)^b dx < \infty,$$

где

$$\mu_\varkappa(G) = inf\left\{\sum_j \rho_j^\varkappa : \bigcup_j \{x:|x-x_j|<\rho_j\} \supset G\right\}.$$

Тогда система (1) с $f = f_1 + f_2$ *имеет решение* u,

$$||D^s u||_\omega \le c||f||_\omega < \infty, \tag{4}$$

где $\omega(x)$ – *почти всюду положительный вес (зависящий от* f*),* $1/\omega \in L_{q,\mathrm{loc}}$ $\forall q < n/a$, *и если* $f \in L_2(\Omega)$, *то* ω *отделено от нуля внутри* Ω.

Буквой c здесь и далее обозначены различные несущественные положительные константы.

Замечание. $u \in W^s_{p,\mathrm{loc}}$ $\forall p < 2n/(n+a)$.

Это следует по неравенству Гельдера из (4) и $1/\omega \in L_{q,\mathrm{loc}}$:

$$\left(\int |D^s u|^p dx\right)^{1/p} \le \left(\int |D^s u|^2 \omega dx\right)^{1/2}\left(\int \omega^{-q}dx\right)^{1/2q}$$

при $p = 2q/(1+q)$.

Аналогичные результаты могут быть получены в достаточно произвольной шкале пространств (например, $f_1 \in L_p$, $p \in (p_1,2)$, $p_1(K) \in (1,2)$), но преимущество шкалы, связанной с мерой $\mu_\varkappa$, заключается в возможности явной оценки a_1, a_2. Отметим, что при $a \to n$ предельным условием для f_1 будет $f_1 \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Что касается доказательства теоремы 1, приведем только схему получения априорной оценки (4). Обозначим $G_i = \{x : |f_1(x)| > 2^i\}$, i – целое от $-\infty$ до $+\infty$, и пусть $B_{ij} = \{x : |x - x_{ij}| < \rho_{ij}\}$ – система шаров такая, что $\bigcup_{j=1}^\infty B_{ij} \supset G_i$, $\sum_{j=1}^\infty \rho_{ij}^\varkappa < 2\mu_\varkappa(G_i)$, $\varkappa = (n+a)/2$. Положим

$$\omega(x) = \left[r^{-b} + 1 + \sum_{i=-\infty}^\infty \sum_{j=1}^\infty 2^i\ \rho_{ij}^\varkappa\ r_{ij}^{-a}\right]^{-1},$$

$r = |x|$, $r_{ij} = |x - x_{ij}|$. Тогда

$$\begin{aligned}||f_1||_\omega^2 &\le \sum_{ij} ||f_1; L_{2,\omega}(B_{ij} \setminus G_{i+1})|| \\ &\le \sum_{ij}\int_{B_{ij}\setminus G_{i+1}} |f_1|^2\ 2^{-i}\ \rho_{ij}^{a-\varkappa}dx \le c\sum_{ij} 2^i\ \rho_{ij}^\varkappa \le c\sum_i 2^i\ \mu_\varkappa(G_i) \\ &\le c\sum_i \int_{2^{i-1}}^{2^i} \mu_\varkappa(G_i)d\tau \le c\int_0^\infty \mu_\varkappa(\{x:|f_1(x)|>\tau\})d\tau < \infty,\end{aligned}$$

$$||f_2||_\omega^2 \le \int_{\mathbb{R}^n} |f_2|^2(1+r)^b dx < \infty.$$

То, что $1/\omega \in L_{q,\mathrm{loc}}$, $q < n/a$, следует из неравенства Минковского и условия на f_1:

$$\left(\int_{|x|<R} \Big(\sum_{ij} 2^i\ \rho_{ij}^* \ r_{ij}^{-a}\Big)^q dx\right)^{1/q} \le \sum_{ij} 2^i\ \rho_{ij}^* \left(\int_{|x|<R} r_{ij}^{-aq} dx\right)^{1/q}$$
$$\le cR^{n/q-a} \sum_{ij} 2^i\ \rho_{ij}^* < \infty.$$

Обозначим $R_{st}(\omega) = ||R_{st}||_{L_{2,\omega}}$. Из следующих элементарных свойств операторов

1) $R_{st}(\sum_{j=1}^\infty \sigma_j) \le \sup\{R_{st}(\sigma_j) :\ j = 1, 2, \ldots\}$,

2) $R_{st}(1/\sigma) = R_{st}^*(\sigma) = R_{ts}(\sigma)$,

получаем

$$R_{st}(\omega) \le \max\{R_{st}(|x|^a),\ R_{st}(|x|^b)\}.$$

Учитывая $R_{st}(|x|^0) = ||R_{st}||_{L_2} = 1$, и применяя интерполяционную теорему Стейна-Вейса (теорема Рисса-Торина для пространств Лебега с весом), получаем $R_{st}(|x|^a) < K^{-1/2}$ при $a \in (a_2, a_1)$, так что

$$R_{st}(\omega) < K^{-1/2}. \tag{5}$$

Подставим в интегральное тождество для системы (1) пробную функцию $v = \Delta^{-m}\mathrm{div}^s(\omega D^s u)$, где Δ^{-m} – оператор с символом $(-|\zeta|^2)^{-m}$ (обоснование допустимости такой подстановки с помощью срезающих функций опускаем). По (2) получаем

$$||D^s u||_\omega^2 + \int R_{st}\big(A(x, u, \ldots D^s u) - f(x)\big)\ \omega D^s u dx = 0,$$

откуда по неравенству Коши

$$||D^s u||_\omega \le ||R_{st} A||_\omega + ||R_{st} f||_\omega.$$

Учитывая (3), находим

$$||R_{st} A||_\omega \le R_{st}(\omega) K^{1/2} ||D^s u||_\omega,$$

что вместе с (5) приводит к оценке (4).

Явная оценка чисел a_1, a_2 вытекает из следующего утверждения.

Теорема 2 . $R_{st}(|x|^a) \le (M_{st}(a))^{1/2}$ *при* $a \in (-n, n)$, *где*

$$M_{st}(a) = \begin{cases} M_1(a)^t M_2(a)^{(s-t)/2}, & s \ge t \\ M_1(a)^s M_2(-a)^{(t-s)/2}, & t \ge s, \end{cases}$$

$$M_1(a) = \max_{j=1,2,\ldots} M_1(a, \lambda_j),\quad M_2(a) = \sup_{j=0,1,\ldots} M_2(a, \lambda_j),\quad \lambda_j = j(j+n-2),$$

$$M_1(a, \lambda) = 1 + a^2 \left(\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2} \frac{n-2-a}{2} \frac{n-2+a}{2}\right)^{-2},$$

$$M_2(a, \lambda) = 1 + a\left(\lambda(a+n-3) + \frac{n-1}{4}(a+n-4)^2\right)\left(\lambda + \frac{n-a}{2}\frac{a+n-4}{2}\right)^{-2}.$$

Функции M_1, M_2 легко вычисляются, отметим

$$M_1(a) = M_1(a, \lambda_j), \quad a_j \le |a| < a_{j-1},$$

где $a_0 = n$, $a_j = \max\{0; (n-2)^2 - 4(\lambda_j \lambda_{j+1})^{1/2}\}^{1/2}$, $j \ge 1$;

$$M_2(a) = \begin{cases} 1 + 4a(n-1)(n-a)^{-2}, & 0 \le a < n \\ 1, & 3 - n \le a \le 0 \\ M_2(a, \lambda_2), & -n < a \le 2 - n. \end{cases}$$

Для выполнения условия теоремы 1 $a \in (a_2, a_1)$ по теореме 2 достаточно выполнения условия $M_{st}(a) < 1/K$, которое является эффективно проверяемым. В некоторых случаях уравнение $M_{st}(a) = 1/K$ разрешимо в радикалах. Так, в дивергентном случае ($s = t = m$) имеем

$$-a_2 = a_1 \ge \min_{j=1,2,\dots} \left[\left(\frac{4\lambda_j}{1 - K^{1/m}} + (n-2)^2 \right)^{1/2} - \left(\frac{4\lambda_j K^{1/m}}{1 - K^{1/m}} \right)^{1/2} \right].$$

Утверждение теоремы 2 следует из оценок

$$R_{11}(|x|^a) \le (M_1(a))^{1/2},$$

$$R_{20}(|x|^a) = R_{02}(|x|^{-a}) \le (M_2(a))^{1/2},$$

которые выводятся из неравенств

$\forall u$, $||Du||_a < \infty$ $\exists v$, $||Dv||_{-a} < \infty$, $Dv \not\equiv 0$:

$$||Du||_a ||Dv||_{-a} \le (M_1(a))^{1/2} \int DuDvdx;$$

$$||D^2u||_a^2 \le M_2(a) ||\Delta u||_a^2,$$

где $a \in (-n, n)$, $||u||_a = ||u; L_2(\mathbb{R}^n; |x|^a)||$. Первое неравенство установлено в [5], близкие оценки при $a = 2-n-\varepsilon$ получены в [6, с.84], второе неравенство при $a < 0$ – в [1], при $a > 0$ – в [6, с.29].

Представляя дельта-функцию в виде $\delta = \Delta^m \Phi$, где Φ – фундаментальное решение полилапласиана, из теорем 1,2 получаем следующее достаточное условие разрешимости системы (1), когда в правой части стоит дельта-функция или ее производная.

Теорема 3 . *Пусть $j \in \{0, 1, \dots, t-1\}$, $j > t - n$, (3) выполнено с $K < 1/M_{st}(n - 2t + 2j)$. Тогда система $\mathcal{L}u = D^\alpha \delta(x - y)$, $|\alpha| = j$, имеет решение $u \in W^s_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus y)$ такое, что*

$$c_1 \le \rho^{n-2t+2j} \int_{\rho < |x-y| < 2\rho} |D^s u|^2 dx \le c_2 \quad \forall \rho \in (0, \infty).$$

1. *Cordes H.O.*, Uber die erste Randvertaufgabe bei quasilinear Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen // Math. Ann. – 1956. **131**, – P. 287–312.
2. *Калита Е.А.* , Регулярность решений эллиптических систем типа Кордеса произвольного порядка // Докл. АН УССР. – 1989. – **А**. – *N 5*. – С. 12–15.
3. *Калита Е.А.* , Теорема Лиувилля для эллиптических систем типа Кордеса высокого порядка // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**. – *N 2*. – С. 199–205.
4. *Дынькин Е.М.*, *Осиленкер Б.П.* , Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – 1983. – **21**. – С. 42–129.
5. *Калита Е.А.* , О предельной гладкости решений эллиптических систем второго порядка // Известия вузов. Математика. – 1992. – *N 3*. – С. 10–17.
6. *Koshelev A.I., Chelkak S.I.*, Regularity of solutions of quasilinear elliptic systems // Leipzig: Teubner, 1985. – 208 p.

Институт прикладной математики и
механики НАН Украины, Донецк